Лабораторная работа № 1  
Тема: «ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ»

**Цель работы:** Освоение получения выборок псевдослучайных чисел с помощью различных программных средств для их использования в статистических исследованиях.

**Постановка задачи**

1) Сформировать две последовательности псевдослучайных чисел: стандартную равномерную и нормальную с использованием процедуры **Генерация случайных чисел**, входящей в **Пакет анализа** EXCEL. В каждой последовательности должно быть 100 случайных чисел.

2) Сформировать две последовательности равномерно распределенных псевдослучайных чисел с использованием функций EXCEL **СЛЧИС** и **СЛУЧМЕЖДУ**.

В каждой последовательности должно быть по 100 случайных чисел.

3) Выполнить специальное задание

4) Сформировать две последовательности псевдослучайных чисел: равномерную и нормальную с использованием функций MathCad **runif** и **rnorm.**

В каждой последовательности должно быть по 10 случайных чисел.

5) Сформировать две последовательности псевдослучайных чисел с помощью программы на языке высокого уровня.

В каждой последовательности должно быть по 50 случайных чисел, варианты см. Таблица 2.

6) Заполнить отчет и написать выводы к работе.

**Теоретические сведения**

Случайными числами с заданным законом распределения называют числа, последовательность которых обладает статистическими свойствами, идентичными статистическим свойствам последовательности независимых реализаций случайной величины, имеющей этот закон распределения. В терминах математической статистики о последовательности случайных чисел с заданным законом распределения можно говорить как о случайной выборке из генеральной совокупности, распределенной по этому закону.

Случайные числа широко используются в статистическом моделировании, математической статистике, статистических играх, криптографии и кодировании.

Случайные числа генерируют с помощью специальных электронных или электромеханических устройств, которые преобразуют физические процессы, имеющие случайный характер (шумы полупроводниковых приборов, радиоактивный распад и т. п.), в последовательность случайных чисел. Такие устройства называются датчиками (генераторами) случайных чисел.

Серийные ПК не имеют встроенных физических датчиков случайных чисел, поэтому при вычислениях приходится использовать так называемые псевдослучайные числа, получаемые из исходного числа (исходных чисел) при помощи арифметических алгоритмов (подчас довольно сложных), обладающие таким же комплексом статистических свойств, как и «настоящие» случайные числа.

Для получения псевдослучайных чисел создаются специальные программы. С их помощью каждое псевдослучайное число хi получают из предыдущего псевдослучайного числа хi-1 применением к последнему определенной последовательности арифметических и логических операций. Эти числа не являются случайными в полном смысле этого слова, так как, зная исходное число (исходные числа) и программу преобразования, можно определить все последующие числа псевдослучайной последовательности (отсюда и приставка *псевдо*).

Наиболее употребительны случайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0, 1]. Последовательность r1, r2, ..., ri... таких случайных чисел часто называют стандартной равномерной последовательностью и обозначают символом {ri}. Символ r (или ri) обозначает одно из случайных чисел такой последовательности. Практически все приемы статистического моделирования всех случайных объектов (случайных событий, величин, векторов и процессов) основаны на использовании стандартных равномерных случайных чисел.

Наряду с равномерными случайными числами широко используются и случайные числа, имеющие стандартное нормальное распределение (нормальное распределение с математическим ожиданием μ = 0 и стандартным отклонением σ = 1). Последовательность u1, u2, ..., ui таких случайных чисел называется стандартной нормальной последовательностью и обозначается символом {ui}. Символ u (или ui) обозначает одно из случайных чисел такой последовательности. С помощью линейного преобразования xi = μ + σui последовательность {ui} стандартных нормальных случайных чисел может быть преобразована в последовательность {xi} нормальных случайных чисел с заданными математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ.

**Процедура "Генерация случайных чисел"**

Эта процедура позволяет генерировать случайные числа, имеющие различные распределения.

Для доступа к процедуре **Генерация случайных чисел** **(Random Number Generation)** в MS Office 2003 необходимо:

* в меню **Сервис** **(Tools)** щелкнуть левой клавишей на строке **Анализ** **данных** (**Data** **Analysis**);

*Примечание*. Если в меню **Сервис** нет строки **Анализ данных**, следует подключить пакет анализа следующим образом: в меню **Сервис** щелкнуть на строке **Надстройки**. В открывшемся окне отметить **Пакет анализа**. Нажать **ОК**. В меню **Сервис** должна появиться строка **Анализ данных**.

* в открывшемся окне **Анализ данных** выделить процедуру **Генерация случайных чисел** и щелкнуть на кнопке **ОК**.

На экране появится диалоговое окно **Генерация случайных чисел**.

Для доступа к процедуре **Генерация случайных чисел** **(Random Number Generation)** в MS Office 2007 необходимо:

* в меню **Данные** во вкладке **Анализ** щелкнуть левой клавишей на строке **Анализ** **данных** (**Data** **Analysis**);

*Примечание*. Если в меню **Данные** нет вкладки **Анализ**, следует подключить пакет анализа следующим образом:

* 1. Нажать на кнопку **Office,** и в открывшемся окне (внизу) нажать кнопку **Параметры Excel**.
  2. В открывшемся диалоговом окне **Параметры Excel** в списке параметров выбрать пункт **Надстройки**.
  3. Из списка надстроек выбрать **Пакет анализа**, нажать на кнопку **Перейти**.
  4. В открывшемся окне **Надстройки** выбрать пункт **Пакет анализа**,нажать кнопку **Ок**.
  5. В меню **Данные** будет добавлена вкладка **Анализ**, в которую будет помещена кнопка **Анализ данных**, нажатие на которую при последующих запусках **Excel** приводит к открытию диалогового окна **Анализ данных**.
* в открывшемся окне **Анализ данных** выделить процедуру **Генерация случайных чисел** и щелкнуть на кнопке **ОК**.

На экране появится диалоговое окно **Генерация случайных чисел**.

Элементы управления этого диалогового окна зависят от вида распределения, выбранного пользователем. Однако часть элементов являются общими для всех распределений. К их числу относятся:

* поле ввода **Число переменных (Number of Variables)**. В это поле вводится количество последовательностей случайных чисел, которые предстоит сформировать (количество столбцов диапазона вывода результата);
* поле ввода **Число случайных чисел (Number of Random Numbers)**. В него вводится количество случайных чисел в последовательности (количество строк диапазона вывода результата);
* раскрывающийся список **Распределение (Distribution)**. В списке перечислены распределения, генерируемые рассматриваемой процедурой. Нужное распределение выбирается выделением соответствующей строки списка распределений;
* поле ввода **Случайное рассеивание (Random Seed)**. В это поле вводится исходная константа генерируемой последовательности псевдослучайных чисел. В него можно ввести любое целое число от 1 до 32767. Заполнение этого поля необязательно – Excel сам введет исходную константу. В случае необходимости воспроизвести точную копию сгенерированной ранее последовательности случайных чисел надо ввести в поле **Случайное рассеивание** ту же самую исходную константу, которая использовалась при генерировании «оригинала».

«Индивидуальными» для каждого распределения являются поля ввода, предназначенные для установки параметров каждого из семи возможных распределений. Ниже указаны поля ввода области **Параметры (Parameters)**, соответствующие конкретным распределениям данной лабораторной работы:

* **Равномерное** распределение (**Uniform**). Параметрами распределения являются левая и правая границы.распределения. Эти параметры вводятся в поля ввода **Между ... и ...** **(Between... and ...)**;
* **Нормальное** распределение (**Normal**). Параметры этого распределения: математическое ожидание (среднее) μ и стандартное отклонение σ. Они вводятся в поля **Среднее** (**Mean**) и **Стандартное** **отклонение** (**Standard Deviation**).

**Функции Excel для генерации равномерно распределенных случайных чисел**

Функции **СЛЧИС** (**RAND**) и **СЛУЧМЕЖДУ (RANDBETWEEN)** входят в категорию **Математические**. Они часто используются в статистическом анализе для моделирования псевдослучайных величин. Доступ к этим функциям возможен при использовании **Мастера** **функций**, вызываемого командой **Вставка>Функция** либо нажатием на кнопку ***fx*** в строке формул.

Функция **СЛЧИС** возвращает число (числа), равномерно распределенные на интервале [0, 1]. Новое случайное число (числа) возвращается при каждом вычислении рабочего листа.

Синтаксис этой функции: **СЛЧИС()**, то есть она не имеет аргументов.

Функцию **СЛЧИС** можно непосредственно использовать в формулах (в том числе в формулах массивов) как аргумент формулы или другой функции.

Формулы, содержащие функцию **СЛЧИС**, пересчитываются при каждом пересчете рабочего листа (например, при любом вводе значения в ячейку или при удалении чего-либо, или при нажатии клавиши **F9**). Зафиксировать значения, полученные с помощью этой функции можно преобразовав формулы в значения.

Чтобы получить случайное вещественное число на произвольном интервале [a, b], можно использовать следующую формулу:

**(b-a)\*СЛЧИС()+a**,

где вместо a и b подставляются конкретные числа или ссылки на ячейки, содержащие эти числа.

Если требуется использовать функцию **СЛЧИС** для генерации псевдослучайного числа, но изменение этого числа при каждом вычислении значения ячейки нежелательно, можно ввести в строку формул **=СЛЧИС()**, а затем нажать клавишу **F9**, чтобы заменить формулу на случайное число.

Функция **СЛУЧМЕЖДУ** генерирует целочисленные значения, подчиняющиеся дискретному равномерному распределению (эта функция доступна только при подключенной надстройке **Пакет** **анализа**).

Синтаксис этой функции:

**СЛУЧМЕЖДУ(Нижняя\_граница;Верхняя\_граница)**.

Аргумент **Нижняя\_граница** задает нижнюю границу интервала изменения случайной величины, аргумент **Верхняя\_граница** – верхнюю границу этого интервала. Если значение аргумента не целое число, оно усекается до своей целой части. Если значение аргумента **Нижняя\_граница** больше значения аргумента **Верхняя\_граница**, функция возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!

Функция **СЛУЧМЕЖДУ** не используется в формулах массивов. Формулы, содержащие функцию **СЛУЧМЕЖДУ** пересчитываются при каждом пересчете рабочего листа. Поэтому, чтобы зафиксировать значения, полученные с помощью этой функции, необходимо преобразовать формулы в значения.

*Примечание*. Аналогом функции **СЛУЧМЕЖДУ** является формула

**=ЦЕЛОЕ((b– a)\*СЛЧИС()+a)** , которая генерирует целочисленные значения на интервале [a, b-1].

**Генерация последовательности псевдослучайных чисел, распределенных по равномерному закону**

* 1. Перейти на рабочий **Лист** **1** и присвоить ему новое имя — **Равн** следующим образом:
  2. Щелкнуть правой клавишей мыши по ярлычку **Лист** **1** (**Sheet1**).
  3. В открывшемся меню щелкнуть левой клавишей на команде **Переименовать** (**Rename**).
  4. Ввести с клавиатуры новое название листа – **Равн** и нажать клавишу **Enter**.
  5. На ярлычке **Лист** **1** появится новое название этого листа – **Равн**.
  6. В меню **Данные** во вкладке **Анализ** нажать кнопку **Анализ данных**.
  7. В открывшемся диалоговом окне **Анализ данных** выделить процедуру **Генерация случайных чисел** и щелкнуть на кнопке **ОК**.
  8. В открывшемся диалоговом окне **Генерация случайных чисел** в поле **Число переменных** ввести число 1, а в поле **Число случайных чисел** – число 100.
  9. В раскрывающемся списке **Распределение** выбрать пункт **Равномерное** (**Uniform**).
  10. Оставить без изменений предлагаемые процедурой параметры 0 и 1 стандартного равномерного распределения.
  11. В поле **Случайное** **рассеивание** ввести исходную константу – номер студента по списку в журнале.
  12. В поле **Выходной** **интервал** ввести ссылку А1 на первую ячейку диапазона, расположенного на листе **Равн**, в который будет выведена сгенерированная стандартная равномерная последовательность случайных чисел.
  13. Щелкнуть на кнопке **ОК**.

На листе **Равн** в диапазоне ячеек А1:А100 появится стандартная равномерная последовательность, состоящая из 100 случайных чисел.

Сформированная равномерная выборка представляет собой диапазон-столбец, состоящий из 100 чисел. Эту выборку удобно представить в более компактном виде – в виде прямоугольной таблицы размером 10 х 10. Для того чтобы преобразовать диапазон-столбец А1:А100 в прямоугольную таблицу, необходимо воспользоваться командой **Правка** > **Специальная** **вставка** (**Edit** > **Paste** **Special**).

Выделим диапазон А1:А10, содержащий числа первой строки будущей таблицы, и щелкнем на кнопке **Копировать** (**Сору**) на панели инструментов (или выберем **Копировать** (**Сору**) в меню **Правка** (**Edit**)). При этом вокруг выделенного диапазона появится мигающая пунктирная рамка.

Выделим ячейку С1 (левый верхний угол будущей прямоугольной таблицы) и щелкнем по меню **Правка** (**Edit**). В открывшемся списке команд этого меню выделим команду **Специальная** **вставка** (**Paste** **Special**).

В открывшемся диалоговом окне **Специальная** **вставка** установим флажок **транспонировать** (**Transpose**) и щелкнем на кнопке **ОК**. В диапазоне С1:L1 появится первая строка будущей таблицы размером 10x10.

Выделим диапазон А11:А20 и щелкнем на кнопке **Копировать** (**Сору**).

Выделим ячейку С2 (первая ячейка второй строки таблицы) и щелкнем по меню **Правка** (**Edit**). В открывшемся списке команд этого меню выделим команду **Специальная** **вставка** (**Paste** **Special**).

В открывшемся диалоговом окне **Специальная** **вставка** установим флажок **транспонировать** (**Transpose**) и щелкнем на кнопке **ОК**. В диапазоне С2:L2 появится вторая строка будущей таблицы размером 10x10.

Повторяя описанные действия, получим таблицу размером 10x10, элементы которой расположены (читаются) по строкам

**Генерация последовательности псевдослучайных чисел, распределенных по нормальному закону**

Перейти на **Лист 2**. Переименовать его в **Норм**. Произвести аналогичные вышеуказанным действия, выбрав в раскрывающемся списке **Нормальное** (**Normal**) распределение.

**Генерация равномерно распределенных случайных чисел с использованием функции СЛЧИС**

1. Перейти на **Лист** **3**. Переименовать его в **СЛЧИС**.
2. Выделить диапазон ячеек A1:A100.
3. Не снимая выделения, в строку формул ввести **=СЛЧИС()**, после этого нажать комбинацию клавиш **<Ctrl>+<Shift>+<Enter>**. Excel поместит формулу массива во все выделенные ячейки и автоматически заключит формулы в фигурные скобки, чтобы подчеркнуть, что это формулы массива. В заданном диапазоне будет сгенерирована равномерно распределенная последовательность псевдослучайных вещественных чисел на интервале [0, 1].
4. Чтобы зафиксировать полученные значения, необходимо выделить диапазон, содержащий эти значения, и скопировать его, используя, например, команду **Правка>Копировать**.
5. Не снимая выделения диапазона, выполнить команду **Правка>Специальная вставка**.
6. В открывшемся диалогом окне **Специальная вставка** установить переключатель **Значения**.
7. Щелкнуть на кнопке **ОК**.
8. Выборку представить в виде прямоугольной таблицы размером 10 х 10 как указано выше.

**Генерация равномерно распределенных случайных чисел с использованием функции СЛУЧМЕЖДУ**

1. Добавить в рабочую книгу **Лист** **4**. Переименовать его в **СЛУЧМЕЖДУ**.
2. В первую ячейку диапазона ввести формулу **=СЛУЧМЕЖДУ(0;100)**.
3. Скопировать эту формулу во все остальные ячейки диапазона A1:A100. В заданном диапазоне будет сгенерирована равномерно распределенная последовательность псевдослучайных целых чисел на интервале [0, 100].
4. Зафиксировать значения, полученные с помощью этой функции, преобразовав формулы в значения, как описано выше.
5. Выборку представить в виде прямоугольной таблицы размером 10 х 10 как указано выше.

**Специальное задание**

Добавить в рабочую книгу **Лист** **5**. Переименовать его в **ЗАДАНИЕ**. На добавленном листе поместить **две** последовательности по **двадцать** равномерно распределенных случайных **целых** чисел, сгенерированных на интервале [a, b] с использованием функций **СЛЧИС** и **СЛУЧМЕЖДУ**. Границы интервала изменения случайных величин взять из следующей таблицы вариантов заданий.

Таблица 1 – Варианты для спецзадания

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Нижняя граница интервала, a** | **Верхняя граница интервала, b** | **№ п/п** | **Нижняя граница интервала, a** | **Верхняя граница интервала, b** |
| 1 | 1 | 63 | 14 | 14 | 111 |
| 2 | 2 | 89 | 15 | 15 | 106 |
| 3 | 3 | 42 | 16 | 16 | 60 |
| 4 | 4 | 78 | 17 | 17 | 67 |
| 5 | 5 | 76 | 18 | 18 | 42 |
| 6 | 6 | 105 | 19 | 19 | 44 |
| 7 | 7 | 68 | 20 | 20 | 115 |
| 8 | 8 | 87 | 21 | 21 | 47 |
| 9 | 9 | 119 | 22 | 22 | 87 |
| 10 | 10 | 94 | 23 | 23 | 44 |
| 11 | 11 | 65 | 24 | 24 | 105 |
| 12 | 12 | 36 | 25 | 25 | 89 |
| 13 | 13 | 57 | 26 | 26 | 41 |

**Функции MathCad для генерации случайных чисел**

Для каждого закона распределения в MathCad имеется функция-генератор случайных чисел.

Функция **runif(m, a, b)** возвращает вектор **m** равномерно распределенных случайных чисел на интервале [a, b], a<b.

Функция **rnorm(m, µ, σ)** возвращает вектор **m** нормально распределенных случайных чисел с математическим ожиданием **μ** и стандартным отклонением **σ** , σ>0.

*Примечание*. Функция **Rnd(n)** возвращает **одно** случайное число, лежащее в интервале [0, n].

Доступ к указанным функциям осуществляется либо через пункт меню **Insert>Function**, либо по нажатию комбинации клавиш **<Ctrl>+<E>**, либо используя кнопку ***fx*** панели инструментов **Стандартная** (**Standart**).

В списке **Function Category** (**Категория функции**) появившегося диалогового окна **Insert Function** (**Вставить функцию**) необходимо выбрать категорию **Random Numbers** (**Случайные числа**), затем в списке **Function Name** (**Имя функции**) выбрать имя встроенной функции Mathcad.

**Генерация равномерно распределенных случайных чисел в MathCad с использованием функции runif**

1. Определить место в рабочей области документа, где должно появиться выражение и щелкнуть мышью в соответствующей точке документа.
2. Задать значения переменных, являющихся граничными точками интервала (из условия спецзадания):

*L:=a*

*R:=b*

*Примечания*. Оператор присваивания можно вводить, выбрав на панели инструментов **Calculator** кнопку с соответствующей пиктограммой или нажатием комбинации клавиш **<Shift>+<:>**.

Каждая строка заканчивается нажатием клавиши **Enter** или щелчком **левой** кнопки мыши **ниже** или **левее** в поле документа

1. Присвоить переменной результат вычисления функции **runif** и вывести его на экран:

u:=runif(10,L,R)

u=

1. Разместить полученный массив чисел так, чтобы были видны все соседние операторы.
2. Оформить документ MathCad с комментариями.

*Примечание*. Вставить комментарий можно с помощью команды **Insert /Text Region** (**Вставка / Текстовая область**) или перед тем как ввести первый символ, нажать клавишу **<">**.

**Генерация нормально распределенных случайных чисел в MathCad с использованием функции rnorm**

1. Определить место в рабочей области документа, где должно появиться выражение и щелкнуть мышью в соответствующей точке документа.
2. Задать математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение (значения ***a*** и ***b***, соответственно, из условия спецзадания).
3. Получить массив из 10 случайных чисел распределенных по нормальному закону, используя функцию **rnorm**.
4. Разместить полученный массив чисел так, чтобы были видны все соседние операторы.
5. Оформить документ MathCad с комментариями.

**Генерация последовательности случайных с помощью программы на языке высокого уровня**

В языках программирования предусмотрены функции, позволяющие генерировать так называемые псевдослучайные числа в определенном по умолчанию диапазоне.

Например, в языке программирования C получить случайное число можно с помощью функции **rand()**, которая входит в стандартную библиотеку языка. Эта функция без параметров.

Функция **rand**() возвращает целое число от 0 до значения присвоенного константе **RAND\_MAX** (значение RAND\_MAX зависит от системы и определено в заголовочном файле **stdlib.h**).

При каждом новом запуске функция **rand()** генерирует одно и то же число, которое зависит от стартового числа, значение которого равно единице. Отсюда и следует, что числа всегда получаются одинаковыми. Для того чтобы избежать этой проблемы, в паре с **rand()** нужно использовать функцию **srand()**, которая изменяет стартовое число, присваивая ему другую величину, получаемую функцией в качестве аргумента.

Достаточно часто в качестве передаваемой величины в функцию **srand()** используют системное время в секундах, а т.к. это число будет всегда разным, то будем получать на выходе из **rand()** случайные числа. Для того, чтобы в функцию **srand()** передавать текущее системное время, предусмотрена библиотечная функция **time()**, описанная в библиотеке**time.h**. Указанная функция будет возвращать текущее время в секундах (секунды отсчитываются от 00:00:00), если вызывать ее с параметром***NULL***. Таким образом, получим

#include <time.h>

…

srand(time(NULL));

…

**Получение целых случайных чисел в заданных диапазонах**

Формула для получения случайного числа в диапазоне **[a, b]** выглядит так:

**rand() % длина\_диапазона + сдвиг**,

где **длина\_диапазона** вычисляется как **b – a + 1**, сдвигом является значение **a**.

**Получение вещественных случайных чисел**

Если разделить случайное число, преобразованное к вещественному типу, которое выдала функция **rand()**, на значение константы **RAND\_MAX**, то получится вещественное случайное число от 0 до 1. Теперь, если это число умножить на длину диапазона, то получится число, лежащее в диапазоне от 0 до значения длины диапазона. Далее если прибавить к нему смещение к минимальной границе, то число попадает в требуемый диапазон. Таким образом, формула для получения случайного вещественного числа выглядит так:

**(float) rand() / RAND\_MAX \* (max – min) + min**

где max и min – допустимый максимума и допустимый минимум соответственно.

Таблица 2 – Варианты для задания

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **границы интервала 1** | **границы интервала 2** | **№ п/п** | **границы интервала 1** | **границы интервала 2** |
| 1 | [0;10.1) | [-1;63) | 14 | [0;10.1) | (-1;63] |
| 2 | [0.2;23.5) | (-111;- 9] | 15 | [0.1;53.7) | [-1;49] |
| 3 | [-0.3;30.9) | [-1;42] | 16 | [-0.5;50.9) | (1;82) |
| 4 | [4.45;46.3) | (51;163) | 17 | [-4.45;41.4) | [-51; 63) |
| 5 | [-1.5;-50.5) | (-71; 59] | 18 | [-2.5;-30.5) | (-1; 51] |
| 6 | [-6.1;16.1) | [-11;42] | 19 | [6.1;46.1) | (-123; 2) |
| 7 | [-2.0;0.1) | (-31;63) | 20 | [-9.01;0.9) | [0;63] |
| 8 | [0.2;32.5) | (-2;139] | 21 | [0.25;52.5) | [-112;0) |
| 9 | [-40.3;0.9) | [31;142] | 22 | [-41.3;0.1) | (1; 42) |
| 10 | [4.45;62.3) | (-61;63) | 23 | [-4.45;62.3) | [-61;0) |
| 11 | [-31.5;-0.5) | [-1;-89) | 24 | [-12.5;-0.1) | (-3; 89] |
| 12 | [-6.1;56.1) | (12;92) | 25 | [-26.1; 6.1) | [0;92) |
| 13 | [21.2;0.1) | [-11;63] | 26 | [-2.0;-0.1) | (-11;35] |